

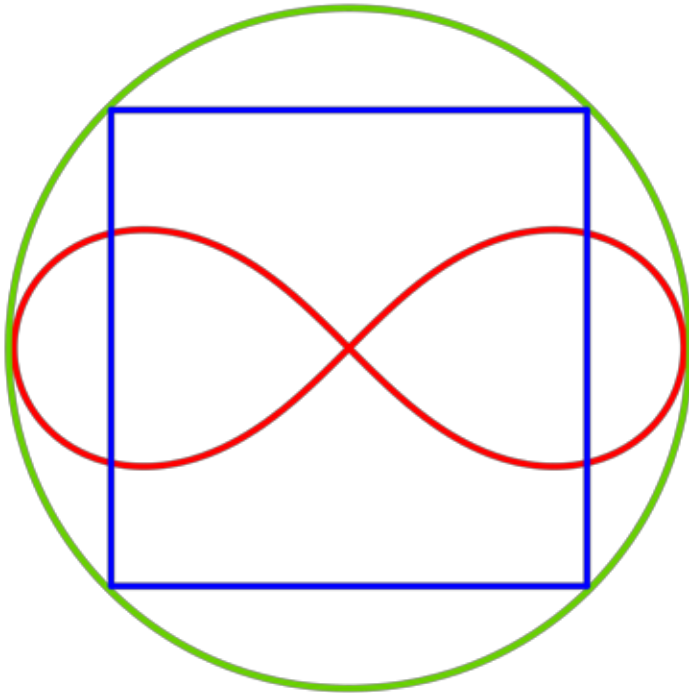
*HANSJÖRG BÖGLE*

# Formen und ihre Beziehung zum Menschen

Der Kreis

Das Quadrat als Bild der Vier

Die Verbindung  
von Kreis und Quadrat



## Impressum

© 2014 bei  
Lammers-Koll-Verlag  
Häfnerstr. 12  
D-74343 Häfnerhaslach  
Tel: +49 (0) 7046 / 8848224  
Fax: +49 (0) 7046 / 8848223  
e-mail: [verlag@lammers-koll-verlag.de](mailto:verlag@lammers-koll-verlag.de)  
[www.lammers-koll-verlag.de](http://www.lammers-koll-verlag.de)  
Web-Shop: [www.yogabuecher.de](http://www.yogabuecher.de)

1. Auflage Juli 2014

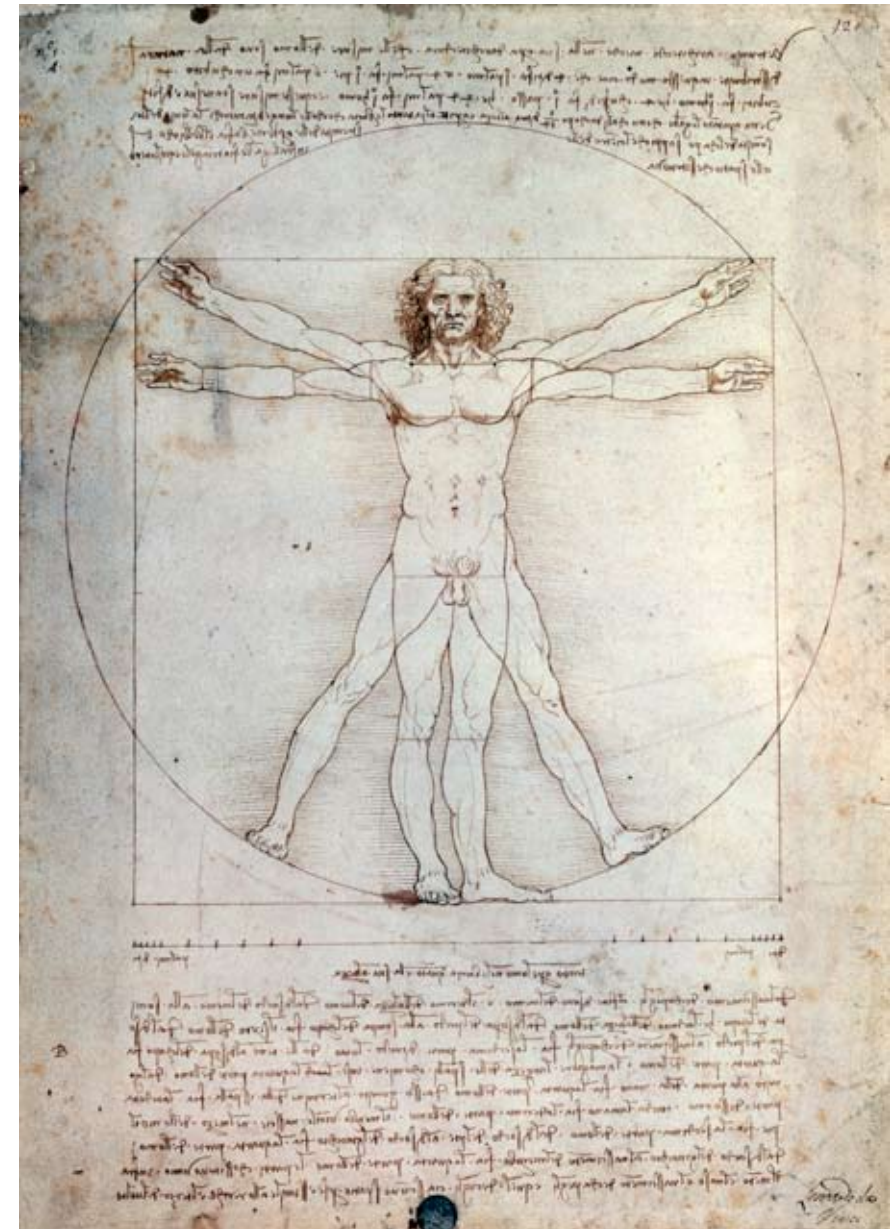
ISBN 978-3-941995-62-8

Alle Rechte vorbehalten

### Bildquellennachweis:

S.3 AKG-Images, Berlin  
Irishes Radkreuz: Duebbers.  
Indianisches Medizinrad: Ökologix  
alle anderen: Anna Marisa

Satz: Hans-Peter Fritsche



*Der Mensch in Kreis und Quadrat.*

*Der vitruvianische Mensch,  
Federzeichnung von Leonardo da Vinci, um 1490*

„... nicht um Neues zu entdecken, sondern um das Entdeckte nach meiner Art anzusehen.“  
J. W. v. Goethe

## Inhalt:

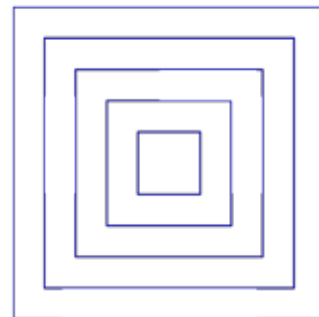
Der Kreis

S. 6



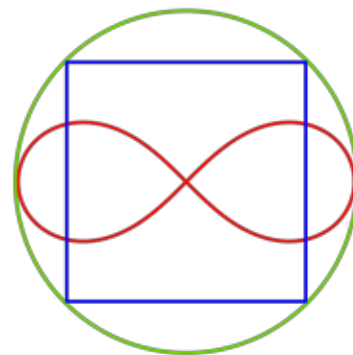
Das Quadrat als Bild der Vier

S. 38



Die Verbindung von  
Kreis und Quadrat

S. 52



## Einführung

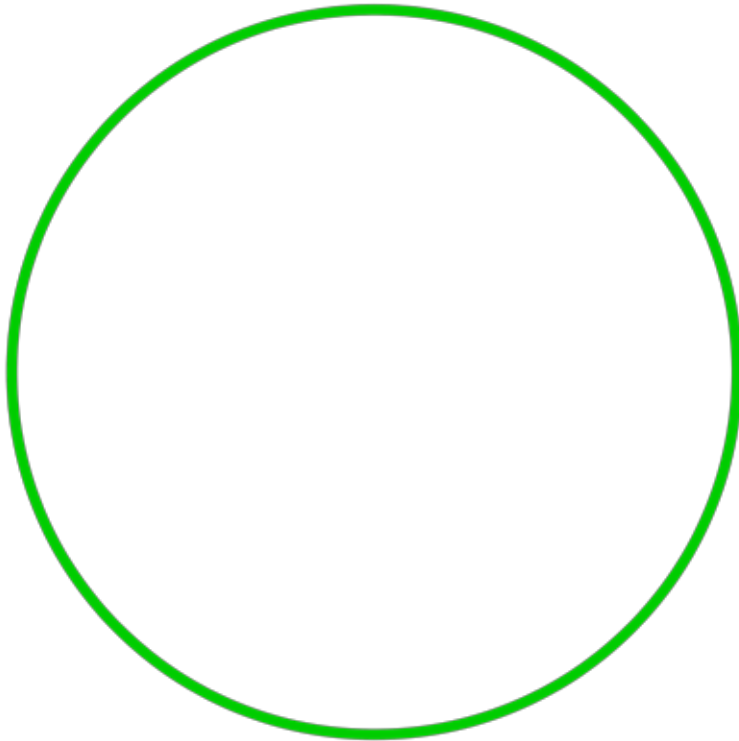
Die vorliegende Broschüre enthält drei Abschnitte. Der erste behandelt die geometrische Grundform der Kreislinie, die in ihrer gleichmäßigen Krümmung den Inbegriff des Runden darstellt. Ausgehend von der Überzeugung, dass sich in geometrischen Grundformen wie dem Kreis etwas Bedeutsames für den Menschen ausdrückt, wird die Kreisform in ihrer Ästhetik, ihren mathematischen Gesetzmäßigkeiten und ihrem Bezug zur Umgebung betrachtet. Fragen und Übungen sollen die Empfindungsfähigkeit stärken. Gedanken von Geistesforschern ermöglichen darüber hinaus einen andersartigen, in die Tiefe der Seele reichenden Zugang zum Kreis. Es folgen Beispiele für Anwendungen in der Raumgestaltung durch Kreise und davon abgeleitete Kurven.

Der zweite Abschnitt hat die Zahl Vier in Verbindung zum Menschen als Thema. Die Zahl Vier und ihr bildhafter Ausdruck, das Quadrat mit seinen rechten Winkeln, findet sich in vielerlei Zusammenhängen der äußeren, sinnlichen Welt und erscheint geradezu als Bild der Materie. Insbesondere der rechte Winkel spielt eine dominierende Rolle in der Architektur und bei vielen Gegenständen von Menschenhand. Die Vier lässt sich in zwei Paare gliedern. Bei einer besonderen Lage von zwei Punktepaaren auf einer Geraden sprechen die Mathematiker bezeichnender Weise von harmonischer Lage.

Die geometrische Grundform des Quadrats, das ein elementares Beispiel für eine geradlinig begrenzte Fläche darstellt, erscheint geradezu gegenteilig zur Kreisform, dem Paradebeispiel für eine runde Form. In einem dritten Abschnitt wird der Frage nach einer möglichen Verbindung dieser beiden Formen nachgegangen. Aus beiden zusammen können die Goldene Spirale und eine andere bedeutsame Linie, die Lemniskate, konstruiert werden. Schon in der griechischen Antike stellte sich die Frage nach einem Zusammenhang der beiden Flächenformen in dem klassischen Problem der Quadratur des Kreises.

Diese Gedanken sind, mit Ausnahme derjenigen von Heinz Grill, nicht neu. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, das eigene, innere Erleben bei der Beschäftigung mit geometrischen Formen anzuregen, Bezüge herzustellen und, soweit möglich, ohne komplizierte Formeln die tieferen Inhalte und Qualitäten von wesentlichen mathematischen Begriffen näher zu bringen. Insbesondere die zitierten Gedanken aus geistiger Forschung verbinden geometrische Grundbegriffe mit dem Menschen selbst, wodurch sie für jeden eine Bedeutung erlangen, ganz unabhängig vom Grad der mathematischen Vorbildung.

# Der Kreis



*Die Urform des Kreises  
stellt das aufnehmende Prinzip  
durch das Verbindende und Umschließende dar.*

Heinz Grill

## Der Kreis als geometrische Grundform

Die wohl vollkommenste geometrische Form in der Zeichenebene ist der Kreis. Wer empfindet diese gleichmäßig runde, hochsymmetrische Figur nicht als edel und schön? Die Kreisform scheint für den Menschen nicht ganz unwichtig zu sein. Beispielsweise wurde sie von Zen-Kalligraphen wieder und wieder mit einem Pinselschwung gemalt und das nicht nur als handwerkliche Geschicklichkeitsübung. (1)

Welche Bedeutung kommt dem Kreis zu? Wie können wir eine Empfindung zum Kreis entwickeln? Wo treten Kreise in der Natur auf? Wo in der Technik? In der Kunst? In der Kulturgeschichte? Was haben Geistforscher in Bezug auf den Kreis ausgesagt? Was drückt sich in dieser besonderen Form aus? Denn in irgendeiner Weise sollte sich die innere Bedeutung in der äußeren Form widerspiegeln.

Unmittelbar im Vordergrund steht das gleichmäßig Runde und zugleich das in sich Geschlossene. Ein Kreis hat keinen Anfang und kein Ende. Man kann sich endlos auf der Kreislinie fortbewegen. Nach jeder Umdrehung wiederholt sich etwas Früheres, schon da Gewesenes, zyklisch eben. Kein Punkt der Kreislinie unterscheidet sich vom anderen. Der einzige ausgezeichnete Punkt ist der Mittelpunkt, aber der liegt gerade nicht auf der Kreislinie. Im Kreis bestehen dynamische Polaritäten zwischen Mitte und Rand, sowie zwischen dem eingeschlossenen Kreisinneren und dem unbegrenzten Äußeren. (2)

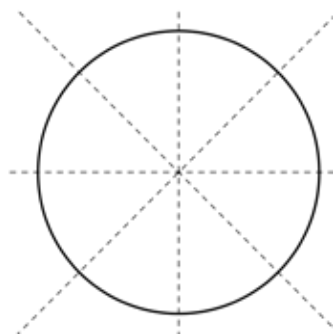
Im Folgenden werde ich Ihnen wiederholt Übungen vorschlagen, die Ihnen helfen können, Ihr Erleben zu vertiefen und dem Wesen des Kreises näher zu kommen.

Zeichnen Sie Kreise mit der freien Hand, indem Sie eine Malkreide oder einen Bleistift wie eine Kreide in die Hand nehmen, sich zunächst die Kreislinie vorstellen und dann über dem Papier mehrfach die kreisende Bewegung ausführen. Erleben Sie das immer weiter Kreisende. Senken Sie erst danach die Malkreide zum Papier und zeichnen Sie aus diesem Schwung heraus mehrmals die gleichmäßige Rundung. Erleben Sie bewusst die Rundheit der Form und das Wiederkehrende.

Haben Sie im Uhrzeigersinn oder in der Gegenrichtung gezeichnet?

Erinnern Sie sich an Situationen, in denen Sie mit mehreren Menschen in einem Kreis stehen. Wie ist die Beziehung zu den anderen Menschen verglichen mit Situationen, in denen Sie einer anderen Person gegenüber stehen, z.B. bei der Begrüßung, oder anderen Situationen, in denen Sie hintereinander stehen, z.B. in einer Warteschlange (vgl. [11])?

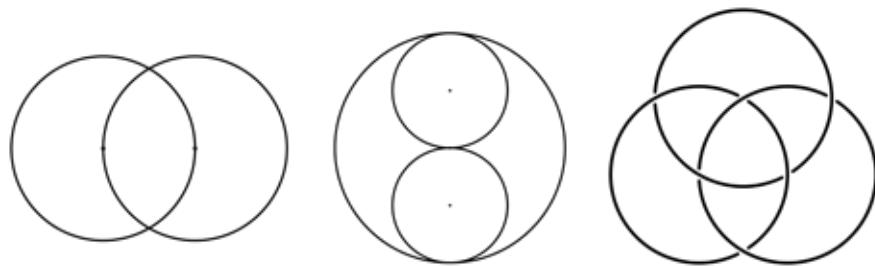
### Ästhetische Zeichnungen mit Kreisen



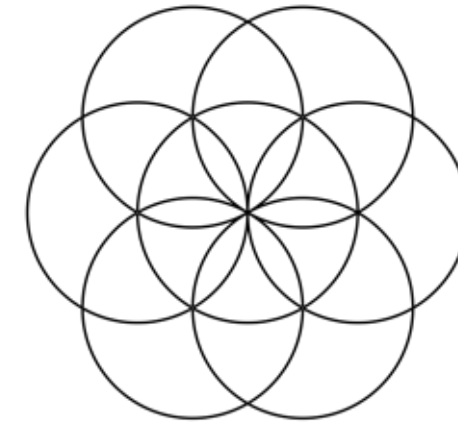
Beginnen wir, indem wir uns der Kreislinie mit einigen einfachen Zeichnungen annähern und dadurch mit ersten geometrischen Eigenschaften vertraut werden. Betrachten wir die verschiedenen Symmetrien. Jede Gerade durch den Mittelpunkt ist eine Symmetrieachse. Der Kreis ist symmetrisch bezüglich beliebiger Drehungen um seinen Mittelpunkt und zu diesem auch punktsymmetrisch. Damit ist der Kreis eine Linienform mit höchster Symmetrie.

Zu einem ersten Kreis gibt es mehrere naheliegende Fortsetzungen, beispielsweise einen zweiten Kreis mit gleichem Radius zu zeichnen, der durch den Mittelpunkt des ersten Kreises verläuft oder einen berührenden Kreis gleicher Größe oder einen Kreis halber bzw. doppelter Größe. Auf eine mögliche Symbolik soll hier nicht eingegangen werden.

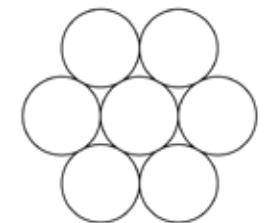
Lassen Sie die Formen ganz unbefangen auf sich wirken oder, noch besser, zeichnen Sie die Figuren mit dem Zirkel selber. Die Kreise können auch als ineinander verflochtene Ringe gezeichnet werden.



Wird die Konstruktion um einen zentralen Kreis herum fortgesetzt, indem man einen Schnittpunkt des vorigen Kreises mit dem Zentralkreis jeweils als neuen Mittelpunkt nimmt, entsteht diese schöne blütenartige Figur. Hier zeigt sich schon ein erster Zusammenhang des Kreises zur Zahl sechs. An dieser Zeichnung kann Genauigkeit geübt werden. Sie können die Form auch farbig gestalten.



Nehmen Sie gleich große Münzen und legen Sie diese an eine mittlere an, so dass sie sich berühren. Ist es nicht erstaunlich, dass die letzte Münze ganz genau zur mittleren und zur ersten äußeren dazu passt? Wieder bilden sechs Kreise einen Kranz. Werden Sie sich Ihres Staunens bewusst, bevor Sie zur mathematischen Begründung weiterschreiten, die daraus etwas Zwangsläufiges macht.



Die Ursache liegt darin, dass eine ganze Drehung  $360^\circ$  also  $6 \cdot 60^\circ$  beträgt. Das Sechseck lässt sich in sechs gleichseitige Dreiecke (d.h. alle drei Seiten sind gleich lang und alle drei Winkel betragen  $60^\circ$ ) zerlegen. Die beiden vorigen Figuren entstehen, indem die Ecken des Sechsecks sowie der Mittelpunkt als Kreismittelpunkt gewählt werden. Der Kreisradius ist entweder eine ganze oder eine halbe Dreieckseite.



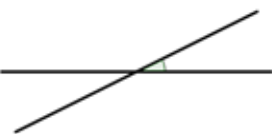
Nehmen Sie einen Zirkel und zeichnen Sie spielerisch Kreise auf ein Blatt. Entwerfen Sie selber verschiedene Ornamente aus Kreisbögen!

## Der Kreis in Bezug zu den Grundmaßen Abstand und Winkel

Die einfachste mathematische Kreisdefinition besagt: Ein Kreis besteht aus allen Punkten (in der Zeichenebene), die den gleichen Abstand von einem Punkt, nämlich dem Kreismittelpunkt, haben. Auf diese Festlegung stützt sich das gebräuchliche Werkzeug um einen Kreis zu zeichnen, der Zirkel. Mit Kreis soll also im Folgenden die gezeichnete Kreislinie gemeint sein. Die Fläche des Kreisinneren wird auch Kreisscheibe genannt.



Die beiden elementaren Bausteine der Geometrie in der Zeichenebene sind Punkte und Geraden. Betrachten wir zwei beliebige Punkte. Die einfachste Frage in Bezug auf diese ist, wie weit sie von einander entfernt sind. Diese Abstandslänge wird z.B. in cm angegeben.

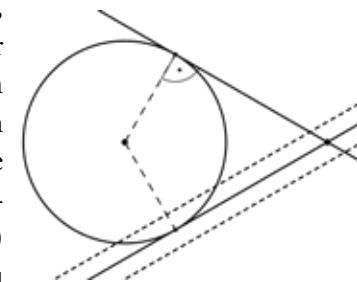


Betrachten wir nun zwei Geraden. Die Frage nach dem Abstand macht hier keinen Sinn (außer wenn sie parallel sind), da sie sich in einem Punkt schneiden. Ein sinnvolles Maß für ihre Abweichung von einander ist, wie sehr sie gegeneinander gedreht sind, also ihr Schnittwinkel, z.B. in Grad gemessen.

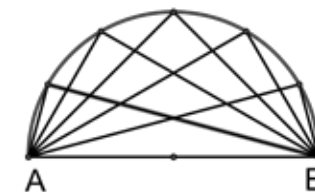
Die beiden grundlegenden Maße sind also Abstand und Winkel. Der Abstand beziffert den Unterschied des Orts, hingegen der Winkel den Unterschied der Richtung. In Bezug auf Bewegungen gesehen hat der Abstand mehr mit einer geradlinigen Vorwärtsbewegung zu tun, der Winkel mehr mit einer Drehbewegung. Im Hinblick auf die wahrnehmenden Sinne könnte man auch sagen, der Abstand wird vom Tastsinn oder mit der Bewegung des Abschreitens wahrgenommen, der Winkel vom Sehsinn, nämlich als Blickwinkel, unter dem etwas erscheint.

Welche Lagebeziehung kann es zwischen einem Kreis und einer Geraden geben? Ein Sonderfall ist sicherlich, wenn die Gerade genau durch den Kreismittelpunkt geht. Sie ist dann eine Symmetrieachse für den Kreis.

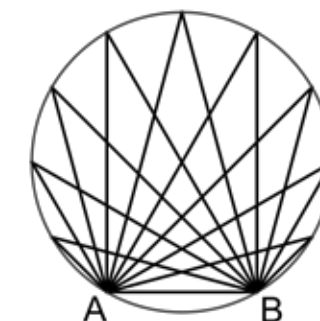
Ein weiterer besonderer Fall liegt bei tangentialer Lage vor. Unter einer Tangente versteht man eine Gerade, die den Kreis genau in einem Punkt berührt, aber sonst völlig im Kreisäußeren verläuft. Von jedem Punkt des Kreisäußeren lassen sich zwei Tangenten an den Kreis legen, jedoch beliebig viele Geraden, die den Kreis nicht treffen (d.h. der Abstand der Geraden zum Mittelpunkt  $M$  ist größer als der Radius  $r$ ) oder ihn in zwei Punkten schneiden (der Abstand zu  $M$  ist kleiner als  $r$ ). Verrutscht die Tangente ein wenig, so verliert sie ihre Eigenschaft Tangente zu sein. Verrutscht man eine andere Gerade nur geringfügig, so trifft sie weiterhin nicht oder zweimal. Insofern stellt die tangentielle Lage einen Sonderfall dar. Für jede Kreistangente gilt: Die Tangente bildet mit dem Radius im Berührungspunkt einen rechten Winkel. Zur besonderen Abstandslage der Gerade gehört also der wichtigste Winkel, der  $90^\circ$ -Winkel.

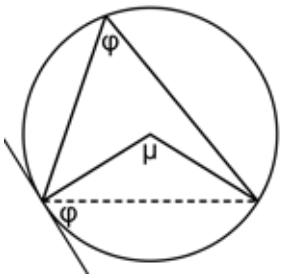


Eine weitere besondere Verbindung von Kreis und rechtem Winkel ist bekannt als Satz des Thales. Verbindet man einen beliebigen Punkt auf dem Halbkreis mit den beiden Endpunkten des Durchmessers  $AB$ , so entsteht ein rechter Winkel. Man kann auch sagen, von jedem Punkt auf dem Halbkreis wird die Strecke  $AB$  mit einem Winkel von  $90^\circ$  gesehen.



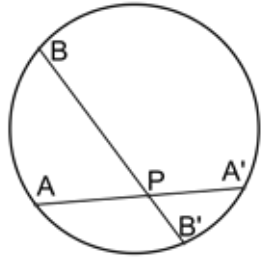
Bei der gebräuchlichen Kreisdefinition tritt der Kreis als Linie mit konstantem Abstand von einem Punkt auf. Ein Kreisbogen ergibt sich jedoch ebenfalls als Linie eines konstanten Blickwinkels  $\varphi$  auf eine Strecke. Der Satz des Thales bildet dabei nur einen Sonderfall. Es handelt sich um den einen Kreisbogen, der von den Endpunkten  $A$  und  $B$  der Strecke begrenzt wird (und einen zweiten, nach unten gespiegelten, wenn man die Drehrichtung des Winkels außer Acht lässt). Vom anderen Teilstück des Kreises aus gesehen erscheint die Strecke unter dem Winkel  $180^\circ - \varphi$ .





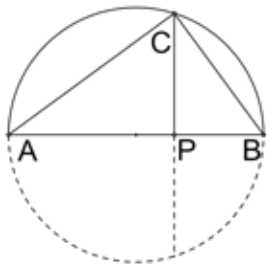
In einigen weiteren Eigenschaften tritt wieder ein Bezug zu Winkeln bzw. Längen auf.

Mittelpunktsatz: Der Mittelpunktswinkel  $\mu$  zu einer Sehne ist doppelt so groß wie der Peripheriewinkel  $\varphi$ . Dieser ist gleich dem Sehnen-Tangenten-Winkel.



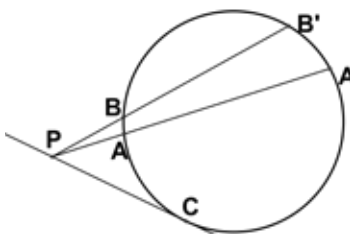
Der Sehnensatz besagt, dass das Produkt der beiden Sehnenabschnitte durch einen Punkt P (im Kreisinneren) immer gleich ist.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'}$$



Ein Sonderfall ist der Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck, wenn eine Sehne der Durchmesser ist und die andere senkrecht dazu steht.

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC}^2$$



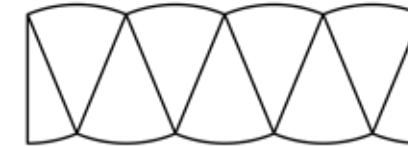
Der Sekanten-Tangentensatz besagt, dass das Produkt der Sekantenabschnitte gleich ist (für P im Kreisäußeren).

$$\overline{PA} \cdot \overline{PA'} = \overline{PB} \cdot \overline{PB'} = \overline{PC}^2$$

### Grundlegendes zur Kreismessung

Wie hängt die Größe der Kreisfläche bzw. die Länge des Kreisumfangs mit dem Radius zusammen? Dieses Problem ist gar nicht so einfach, da sich unsere üblichen Längenmaße auf gerade Strecken beziehen. Aus dem Kreis mit dem Sechseck (S.9) kann man erkennen, dass der Umfang etwas mehr als das Sechsfache des Radius, also etwas mehr als das Dreifache des Durchmessers sein muss.

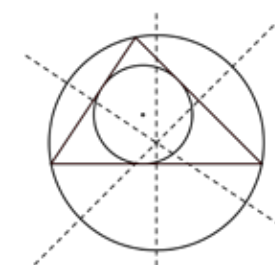
Unabhängig von der Größe ist bei allen Kreisen das exakte Verhältnis Umfang : Durchmesser =  $\pi$ . Daraus ergibt sich die Formel  $U = 2\pi r$  für den Umfang U abhängig von Radius r. Die Kreiszahl  $\pi$  ist 3,14159..., ein nicht endlicher, nicht periodischer Dezimalbruch.  $\pi$  ist der Grenzwert eines fortlaufenden, nicht endenden Annäherungsprozesses. In dieser Zahl  $\pi$  drückt sich die ganze Problematik des Unterschieds gerade – rund aus. (3)



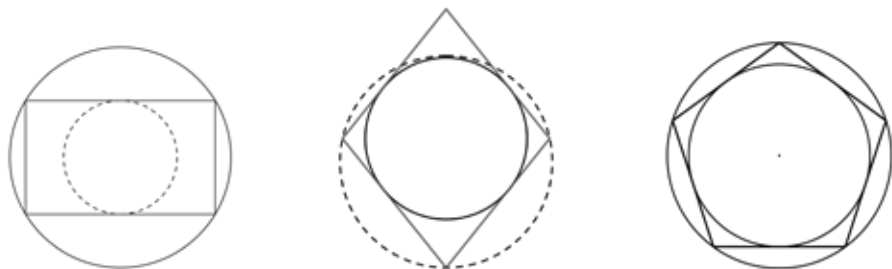
Zur Flächenberechnung kann der Kreis mit Radius r wie ein Kuchen in acht gleichgroße Stücke zerschnitten werden, wobei eines davon nochmals halbiert wird. Diese Stücke ergeben dann annähernd ein Rechteck mit Breite = r und Länge = halber Kreisumfang =  $r\pi$ . Berechnet man versuchs halber die Fläche A mit der Formel für Rechtecke als  $A = \text{Länge} \cdot \text{Breite}$ , so erhält man das richtige Ergebnis:  $A = r\pi \cdot r = r^2\pi$ .

### Kreise und die Zahl drei

Ein Kreis ist durch drei Punkte eindeutig festgelegt. Das besagt gleichzeitig, dass jedes Dreieck einen Umkreis besitzt, das ist ein Kreis, der durch die drei Ecken verläuft. Der Mittelpunkt dieses Kreises wird konstruiert, indem man jeweils in der Mitte zwischen zwei Ecken ein Lot errichtet und diese schneidet. Dreiecke besitzen zusätzlich einen Inkreis, d.h. einen Kreis, der von innen die Seiten berührt. Sein Mittelpunkt ist der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden.



Bereits bei Vierecken ist die Situation anders. Nur manche Vierecke, nämlich die so genannten Sehnenvierecke, haben einen Umkreis, andere nicht. Vierecke mit Inkreis heißen Tangentenvierecke. Regelmäßige Vielecke haben sowohl einen Inkreis als auch einen Umkreis.



### Besondere Eigenschaften von Kreisen

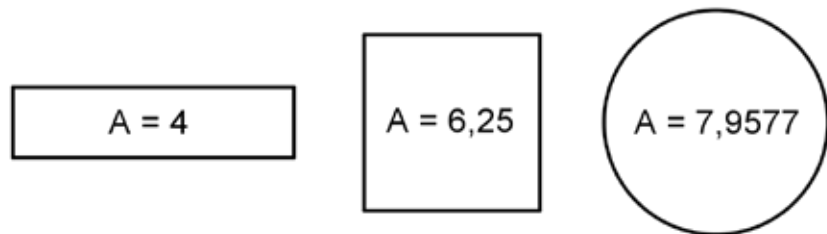
Die mathematisch so einfach definierte Kreisform besitzt einige besondere Eigenschaften. Die drei hier genannten kommen interessanterweise ohne den Mittelpunkt aus.

#### 1. Kreise sind Linien mit konstanter Krümmung

Wenn ein Auto mit fest eingeschlagenem Lenkrad auf einer genügend großen Fläche fährt, so beschreibt es eine Kreislinie und kommt wieder zu seinem Ausgangspunkt.

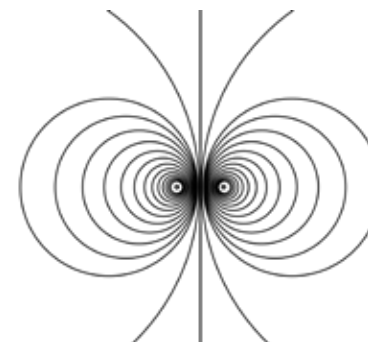
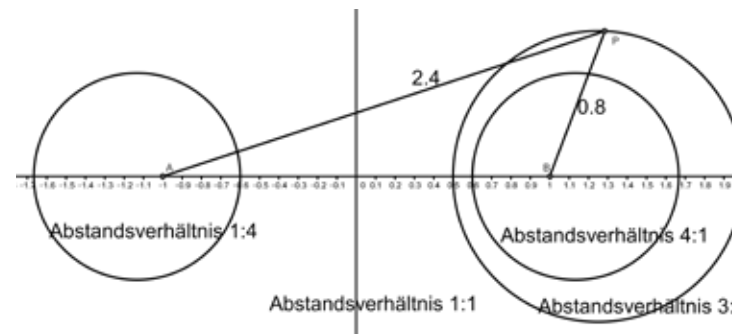
#### 2. Kreise sind die Formen mit dem größten Verhältnis Fläche zu Umfang

Wenn Sie mit einem gegebenen Stück Drahtzaun von z.B. 10 m Länge eine möglichst große Fläche umgrenzen wollen, sollten Sie eine Kreisfläche wählen.



### 3. Kreise sind die Linien mit konstantem Entferungsverhältnis von zwei vorgegebenen Punkten A und B (Apolloniuskreise oder Divisionskreise)

Wählt man einen beliebigen Punkt P und fragt, wo andere Punkte Q liegen, so dass die Abstände zu den Punkten A und B das gleiche Zahlenverhältnis liefern,  $\overline{PA} : \overline{PB} = \overline{QA} : \overline{QB}$ , dann bilden die Punkte Q mit dieser Eigenschaft einen Kreis (als Sonderfall bei gleichem Abstand die Mittelsenkrechte). Zusammen überdecken all diese Kreise die Ebene.

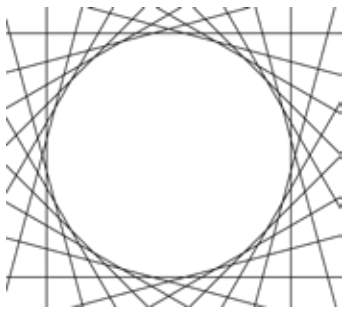


### Kreise als Vermittler zwischen Punkt und Gerade

Lässt man den Kreisradius  $r$  gegen 0 schrumpfen, so wird aus dem Kreis ein Punkt. Wächst umgekehrt der Radius über alle Maßen, so strebt die Krümmung  $k$  (die mathematisch als Kehrwert des Radius  $r$  definiert werden kann, also  $k = 1/r$ ) gegen 0. Als Grenzfall dieser Betrachtung ergibt sich somit eine Linie ohne Krümmung, eine Gerade. Manchmal werden Kreise und Geraden deshalb als verallgemeinerte Kreise zusammengefasst. Im Bild mit den Apolloniuskreisen lassen sich die Übergänge gut betrachten.



## Kreise aus Tangenten

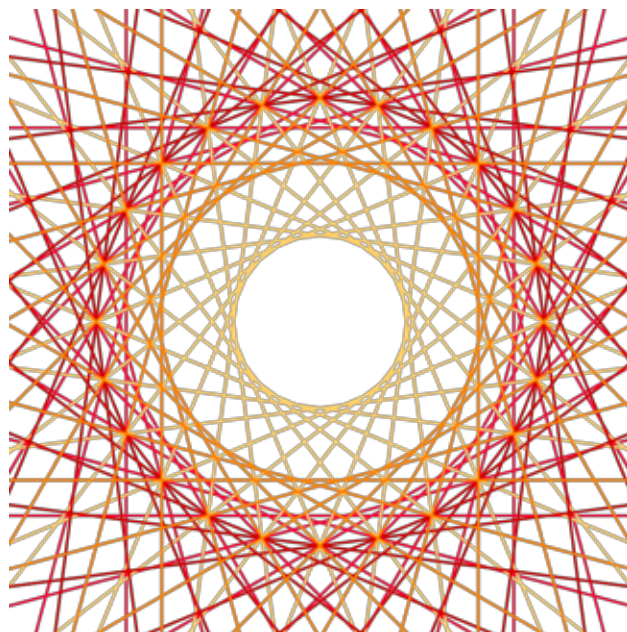


Zeichnet man eine Vielzahl von Tangenten an einen Kreis, so lässt sich die Kreisscheibe wahrnehmen, ohne dass die Kreislinie überhaupt eingezeichnet wird. Gleichzeitig rückt das Umfeld des Kreises viel mehr in die Aufmerksamkeit. Wenn die Tangenten mit gleichen Winkeln gezeichnet werden, entstehen im Kreisäußeren wieder regelmäßige Strukturen. Der Kreis erscheint wie eine Aussparung in der unendlich großen, ausgefüllten Ebene.

Man kann sich auch vorstellen, dass die Geraden von weit außen kommend bis zur Berührung des Kreises herangeschoben werden, der Kreis also aus der Peripherie und nicht aus dem Mittelpunkt entsteht. (4)

Sehr schöne Zeichnungen entstehen, wenn auf einem großen Kreis 24 Punkte in gleichen Abständen markiert werden und von diesen ausgehend Linien zu den Nachbarnpunkten gezogen werden, wobei jeweils eine feste Anzahl von Punkten übersprungen wird. Auf diese Weise entstehen neue, kleinere Kreise (genau genommen Vielecke).

Schüler ab der 6. Klasse können mit verschiedenen Farben experimentieren und nebenbei ihre Genauigkeit, Konzentration und Ausdauer üben.

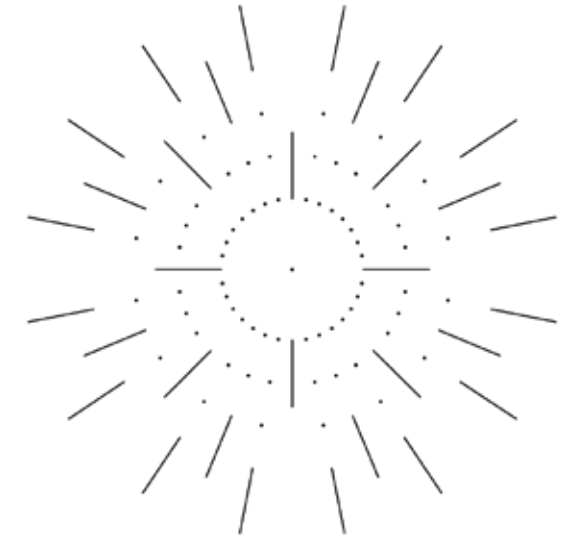


Tangentenkreise

## Kreis vom Umfeld außen

Ganz anders wird der „Kreis aus dem Umfeld“ von Heinz Grill dargestellt.

*„Die Gewohnheit lässt immer einen Kreis aus seinem Mittelpunkt entstehen. Das menschliche Dasein aber entsteht nicht aus der Materie und drängt sich in den Umkreis hinein, sondern es entwickelt sich aus Geisteshöhen, organisiert sich zu einem Bewusstsein und dieses findet schließlich in einem Mittelpunkt sein Zentrum.“  
[9, S.28f]*



Kreis aus der Peripherie

Grundsätzlich ist dabei zu beachten, dass es sich bei den Aussagen von Heinz Grill (das Gleiche gilt für Rudolf Steiner) um Forschungsergebnisse handelt, die er aus seiner langjährigen Auseinandersetzung mit der geistigen Welt erarbeitet hat. Diese Resultate lassen sich nicht aus unseren sinnlichen Erfahrungen oder unserem gewöhnlichen Denken hervorbringen. Denn sie beziehen sich auf eine Seinsebene jenseits der uns vertrauten materiellen Welt, die aber doch mit dieser in enger Verbindung steht. Solche Aussagen ergänzen unsere übliche Anschauung um eine qualitativ andere Dimension. Durch geeignete Bemühungen kann jeder Mensch einen Erkenntnisinn für geistiges Schauen mehr und mehr entwickeln. Da die Angaben der Geistesforscher sich auf eine andere Seinsebene beziehen und aus einer anderen Erkenntnishaltung heraus entstanden sind, sollen sie auch nicht leichtfertig mit unserem Alltagsdenken vermischt werden.

Betrachten Sie die obige Zeichnung mit dem Gedanken der Bewegung von außen nach innen. Welche Kraft oder welche Dimension oder was ist es, das von außen nach innen wirkt?